

# Moment cinétique du photon et optomécanique

## Corrigé

### I – Propriétés du photon

#### I.1 – Préliminaire

1 – Le photon est la **particule médiatrice de l'interaction électromagnétique** : il est de masse nulle et se déplace à la célérité  $c$  de la lumière dans le vide.

#### I.2 – Quantité de mouvement du photon

2 – Dans le cadre de la relativité restreinte,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \text{et} \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

Dans la limite non relativiste ( $v \ll c$ ),  $\gamma \rightarrow 1$  donc **on retrouve la formule de la mécanique classique**  $\vec{p} = m \vec{v}$ .

3 – En remplaçant l'expression relativiste de  $\vec{p}$  dans le carré de l'énergie, il vient

$$E^2 = \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - v^2/c^2} + m^2 c^4$$

Le passage à la limite  $m \rightarrow 0$  dans la formule précédente pour une particule énergétique (énergie  $E$  non nulle) montre effectivement qu'elle se déplace à la vitesse de la lumière dans le vide.

4 – Bien que de masse nulle, un photon possède une quantité de mouvement  $\vec{p}$  orientée selon ses direction et sens de propagation et

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$$

Diverses expériences de mise en évidence de la quantité de mouvement du photon peuvent être décrites : expérience de diffusion de COMPTON (prix Nobel 1927), expériences avec pression de radiation (exploitée avec les voiles solaires)...

5 – On considère une comète de rayon  $R$  (surface  $S = 4\pi R^2$ ) située à une distance  $d$  du Soleil. On note  $R_S$  le rayon du Soleil et  $T_S$  sa température de surface. La pression de radiation est

$$P = \frac{F_{\text{rad}}}{S} = \frac{1}{S} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dN}{dt} \frac{h\nu}{c} = \frac{\Phi_{\text{reçue}}}{Sc}$$

où  $dN/dt$  est le flux de photons incidents (en photons par seconde) et  $\Phi_{\text{reçue}}$  la puissance reçue par la comète. On a supposé ici que les photons sont absorbés par la comète ; on doit multiplier le résultat par 2 si les photons sont réfléchis, mais cela n'est pas déterminant pour l'ordre de grandeur demandé...

La puissance lumineuse totale émise par le Soleil dans l'hypothèse du corps noir est

$$\Phi = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$$

et la comète n'en reçoit qu'une partie :

$$\Phi_{\text{reçue}} = \Phi \frac{\pi R^2}{4\pi d^2} = \Phi \frac{R^2}{4d^2}$$

La force radiative est donc

$$F_{\text{rad}} = PS = \Phi \frac{R^2}{4cd^2} = \frac{\sigma T_S^4 \pi R_S^2 R^2}{cd^2}$$

La force de gravitation sur la comète de masse  $m$  et de masse volumique  $\rho$  est, en notant  $M_S$  la masse du Soleil (fournie par l'énoncé),

$$F_{\text{grav}} = \frac{GM_S m}{d^2} = \frac{4\pi GM_S \rho R^3}{3d^2}$$

Le rapport des deux forces est

$$\frac{F_{\text{rad}}}{F_{\text{grav}}} = \frac{3\sigma T_S^4 R_S^2}{4cGM_S \rho R}$$

Pour l'application numérique, on utilise les données suivantes (en ordres de grandeurs) : on adopte une comète telle que  $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $R = 10^2 \text{ m}$  et on exploite les données en début d'énoncé. Il vient

$$\frac{F_{\text{rad}}}{F_{\text{grav}}} \simeq 10^{-8}$$

On remarque que le rapport des forces varie comme  $\frac{F_{\text{rad}}}{F_{\text{grav}}} \simeq \frac{10^{-6}}{R}$  où  $R$  est exprimé en mètres. Pour les tailles de comètes usuelles, **la force radiative est négligeable devant la force de gravitation due au Soleil.**

### I.3 – Polarisation circulaire et moment cinétique

6 – Les expressions attendues sont les suivantes :

- Pour une polarisation rectiligne suivant  $\vec{e}_x$ ,

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$$

- Pour une polarisation rectiligne formant un angle  $\theta$  avec l'axe  $(Ox)$ , orienté en accord avec l'axe  $(Oz)$  :

$$\vec{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

7 – Les expressions attendues sont les suivantes (selon la convention du point de vue du récepteur fixée par l'énoncé et en prenant bien  $\vec{u}$  unitaire) :

- Pour une polarisation circulaire gauche :

$$\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour une polarisation circulaire droite :

$$\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}$$

8 – Pour une lumière non polarisée, les composantes du champ électrique sont décorréliées en phase et en amplitude.

Un polariseur permet d'obtenir une lumière polarisée rectilignement à partir d'une lumière naturelle.

Un polariseur suivi d'une lame quart d'onde de lignes neutres à 45° de l'axe du polariseur donne une polarisation circulaire (le sens de polarisation dépend de l'orientation de cet axe selon la première ou la seconde bissectrice des lignes neutres).

9 – Au même titre que dans le cadre des ondes électromagnétiques, une polarisation circulaire est la somme de deux polarisations rectilignes orthogonales équivalentes et déphasées de  $\pm\pi/2$  (le signe fixant le sens de la polarisation). Compte tenu de la normalisation d'état souhaitée, il vient aisément

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|X\rangle - j|Y\rangle) \quad \text{et} \quad |D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|X\rangle + j|Y\rangle)$$

10 – On calcule tout d'abord

$$J_{\text{photon},z}|G\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} -j^2/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \hbar |G\rangle$$

donc  $|G\rangle$  est le vecteur propre associé à la valeur propre  $+\hbar$ .

On traite ensuite l'autre état :

$$J_{\text{photon},z}|D\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ j/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} j^2/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\hbar |D\rangle$$

donc  $|D\rangle$  est le vecteur propre associé à la valeur propre  $-\hbar$ .

Le spin du photon vaut 1 et son hélicité est  $\pm\hbar$  : un état de polarisation circulaire gauche (resp. droit) correspond à un moment cinétique intrinsèque  $\langle G|J_{\text{photon},z}|G\rangle = \hbar$  (resp.  $\langle D|J_{\text{photon},z}|D\rangle = -\hbar$ ). On note que les résultats obtenus sont conformes avec les valeurs de  $S_z$  annoncées au début du support documentaire...

11 – Pour une particule de spin 1, les valeurs propres de l'opérateur  $J_z$  sont  $\{-\hbar, 0, \hbar\}$ . Pour le photon, il manque donc la valeur 0 (en lien avec sa masse nulle, comme admis dans l'énoncé).

12 – Les états  $|G\rangle$  et  $|D\rangle$  forment une base sur laquelle on peut exprimer  $|X\rangle$  (associable à la coordonnée  $x$  de l'espace des positions) :

$$|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|G\rangle + |D\rangle).$$

Le moment cinétique moyen suivant  $\vec{e}_z$  pour un état de polarisation rectiligne suivant  $\vec{e}_x$  est

$$\langle X|J_{\text{photon},z}|X\rangle = \frac{1}{2} [\langle G|J_{\text{photon},z}|G\rangle + \langle D|J_{\text{photon},z}|D\rangle]$$

soit, effectivement,

$$\langle X|J_{\text{photon},z}|X\rangle = 0$$

On considère à présent l'état  $|\theta\rangle$  associé à une onde se propageant selon  $\vec{e}_z$  avec une polarisation rectiligne quelconque et on note  $\theta$  l'angle de cette polarisation avec l'axe ( $Ox$ ) (orienté en accord avec l'axe ( $Oz$ )). Dans la base d'espace de positions ( $|X\rangle, |Y\rangle$ ), puis dans la base ( $|G\rangle, |D\rangle$ ),

$$|\theta\rangle = \cos\theta |X\rangle + \sin\theta |Y\rangle = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} (|G\rangle + |D\rangle) + j \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} (|G\rangle - |D\rangle)$$

soit

$$|\theta\rangle = \frac{e^{j\theta}}{\sqrt{2}} |G\rangle + \frac{e^{-j\theta}}{\sqrt{2}} |D\rangle.$$

Par ailleurs, la décomposition spectrale de l'observable moment cinétique projeté sur  $\vec{e}_z$  du photon est

$$J_{\text{photon},z} = \hbar (|G\rangle\langle G| - |D\rangle\langle D|)$$

donc le moment cinétique moyen suivant  $\vec{e}_z$  pour l'état  $|\theta\rangle$  est

$$\langle \theta|J_{\text{photon},z}|\theta\rangle = \hbar (\langle \theta|G\rangle\langle G|\theta\rangle - \langle \theta|D\rangle\langle D|\theta\rangle) = \hbar (|\langle \theta|G\rangle|^2 - |\langle \theta|D\rangle|^2)$$

d'où

$$\langle \theta|J_{\text{photon},z}|\theta\rangle = 0$$

Une onde d'état de polarisation rectiligne ne présente pas de moment cinétique intrinsèque moyen selon la direction de propagation.

Remarque : l'invariance du résultat précédent vis-à-vis de l'angle  $\theta$  n'est pas surprenante vue l'invariance du système par rotation autour de la direction  $\vec{e}_z$ .

#### 1.4 – Expérience de BETH

13 – La figure 1 de l'énoncé donne une bonne idée de l'expérience de BETH, où il faut bien repérer que la rotation de la lame demi-onde se fait autour de l'axe des  $z$ . Pour une classe de terminale, on peut dire que :

- La lumière transporte de la quantité de mouvement et peut donc mettre en mouvement des objets en la transférant; c'est l'exemple de la voile solaire.
- On cherche à mettre en évidence que la lumière peut également faire tourner des objets par transfert d'une autre grandeur qu'elle transporte appelée moment cinétique. Lorsque la lumière traverse une lame biréfringente adaptée, son moment cinétique change, une partie étant transférée à cette plaque qui se met à tourner (voir figure 1).

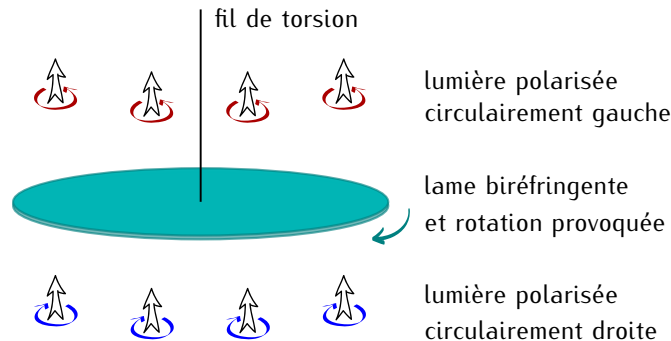


FIGURE 1 – Dispositif (simplifié) de Beth.

Remarque : le dispositif effectivement utilisé par BETH était plus élaboré (avec, entre autres choses, un miroir permettant un aller-retour de la lumière à travers la lame...) et, comme le support documentaire le dit rapidement dans une phrase, il exploitait un effet de résonance (en faisant varier périodiquement la polarisation de la lumière incidente).

14 – Diverses expériences basées sur la mesure d'un angle de torsion peuvent être citées : expériences de CAVENDISH et de COULOMB, galvanomètre, mesure de couple moteur...

## II – Onde guidée et biréfringence géométrique

### II.1 – Réfraction d'une onde électromagnétique

15 – On dispose des relations

$$\|\vec{k}_1\| = n_1 k_0 \quad \text{et} \quad \|\vec{k}_2\| = n_2 k_0$$

16 – Notons  $\Psi_1(M, t)$  une composante quelconque du champ électromagnétique de l'onde plane progressive monochromatique (oppm) incidente. Les composantes analogues pour les oppm réfractée et réfléchie sont notées respectivement  $\Psi_2(M, t)$  et  $\Psi_3(M, t)$ . Les relations de passage à l'interface imposent forcément (en l'absence de sources surfaciques)

$$\Psi_1(M_\Sigma, t) + \Psi_3(M_\Sigma, t) = \Psi_2(M_\Sigma, t)$$

pour tout  $t$  et tout point  $M_\Sigma$  (notation désignant un point  $M$  infiniment proche de l'interface mais du côté du milieu de l'onde considérée). En passant à une écriture complexe des ondes mettant en exergue leurs phases spatiales, il vient

$$\underline{A}_1(t) \exp[-j \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}_\Sigma] + \underline{A}_3(t) \exp[-j \vec{k}_3 \cdot \vec{OM}_\Sigma] = \underline{A}_2(t) \exp[-j \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}_\Sigma]$$

où  $\vec{k}_3$  est le vecteur d'onde de l'onde réfléchie. Cette relation étant valable pour toute position sur l'interface et sachant qu'il existe au moins une composante de l'onde incidente non identiquement nulle, cela veut dire que les exponentielles sont liées et, en particulier pour ce qui nous intéresse,

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{OM}_\Sigma = \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}_\Sigma$$

pour toute position sur l'interface. Cela montre bien que les projections vectorielles sur l'interface des vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  sont égales, d'où

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{e}_x = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 \cdot \vec{e}_z = \vec{k}_1 \cdot \vec{e}_z$$

17 – La première des deux égalités précédentes montre déjà que l'onde réfractée admet un vecteur d'onde parallèle au plan d'incidence.

La dernière égalité de la question précédente fournit

$$\|\vec{k}_1\| \sin \theta_1 = \|\vec{k}_2\| \sin \theta_2.$$

Par appui sur la première question de cette partie, on déduit effectivement la loi de SNELL-DESCARTES

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

18 – La situation avec oppm réfractée n'est acceptable que si  $|\sin \theta_2| \leq 1$ , soit si  $\theta_1$  (défini positivement) ne dépasse pas la valeur d'angle limite

$$\theta_\ell = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = 0,2917 \text{ rad} = 16,71^\circ$$

Cet angle de réfraction limite existe généralement dès que  $n_1 \leq n_2$ . On constate qu'il est particulièrement « faible » dans le cas de l'interface silicium-air en raison de la différence importante des indices; cela facilite le guidage d'ondes dans du silicium plongé dans l'air.

### II.2 – Réflexion totale interne et déphasage associé

19 – L'équation de propagation du champ électrique dans l'air d'indice  $n_2$  s'écrit

$$\Delta \vec{E} - \frac{n_2^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Cette équation de D'ALEMBERT conduit, pour la forme de champ électrique complexe considéré, à la relation (de type dispersion)

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_2 = n_2^2 k_0^2$$

La relation  $\vec{k}_2 \cdot \vec{e}_z = \vec{k}_1 \cdot \vec{e}_z$  fournit rapidement

$$\boxed{k_{2z} = n_1 k_0 \sin \theta_1}$$

La composante suivant  $\vec{e}_z$  du vecteur d'onde est donc réelle et peut être notée  $k_{2z}$ .

Ensuite, la relation (de type dispersion) précédente s'écrit

$$\underline{k}_{2y}^2 + k_{2z}^2 = n_2^2 k_0^2,$$

ce qui permet d'isoler, compte tenu de l'expression de  $k_{2z}$ ,

$$\underline{k}_{2y}^2 = n_2^2 k_0^2 - n_1^2 k_0^2 \sin^2 \theta_1.$$

Comme  $\theta_1 > \theta_\ell$ , le second membre est strictement négatif, d'où

$$\underline{k}_{2y} = \pm j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}$$

Le signe + est à écarter **si l'onde est divergente selon les  $y$  croissants** (le domaine de l'air est illimité dans le contexte d'étude). Ainsi,

$$\boxed{\underline{k}_{2y} = -j k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}$$

Une composante quelconque (suivant un vecteur unitaire  $\vec{e}_i$ ) du champ électrique complexe de l'onde dans l'air a pour forme

$$\underline{E}_{2i} = \underline{E}_{2,0,i} e^{-j \underline{k}_{2y} y} e^{j(k_0 c t - k_{2z} z)}$$

soit, en revenant en notation réelle et en tenant compte de l'argument  $\varphi_i$  du facteur  $\underline{E}_{2,0,i}$ ,

$$\boxed{E_{2i} = |\underline{E}_{2,0,i}| e^{-y/\delta} \cos(k_0 c t - k_{2z} z + \varphi_i)}$$

où

$$\delta = \frac{1}{k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}$$

L'onde dans l'air présente par conséquent les caractéristiques physiques suivantes :

- Elle possède un **caractère progressif** selon  $\vec{e}_z$  (donc parallèlement à l'interface) avec une vitesse de phase

$$\boxed{v_{\varphi,z} = \frac{k_0 c}{k_{2z}} = \frac{c}{n_1 \sin \theta_1}}$$

- Elle possède un **caractère stationnaire atténué, c'est-à-dire évanescent** selon  $\vec{e}_y$  (donc orthogonalement à l'interface) avec une **distance caractéristique d'atténuation**  $\delta$ .

20 – Lors de la réflexion totale de l'onde incidente polarisée rectilignement orthogonalement au plan d'incidence, le champ électrique réfléchi prend une avance de phase  $\Phi_S$  (modulo  $2\pi$ ) par rapport au champ électrique incident qui n'est rien d'autre que l'argument du coefficient de réflexion  $\underline{r}_S$ ; il s'agit bien d'une avance et non d'un retard puisque

l'étude est effectuée avec une notation complexe en  $e^{+j k_0 c t}$ . On a donc besoin d'explicitier ce coefficient :

$$\underline{r}_S = \frac{n_1 k_0 \cos \theta_1 - \underline{k}_{2y}}{n_1 k_0 \cos \theta_1 + \underline{k}_{2y}} = \frac{n_1 \cos \theta_1 + j \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1 - j \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}.$$

Puisque l'on reconnaît le rapport d'un numérateur et d'un dénominateur complexes conjugués, l'argument  $\Phi_S$  de ce coefficient complexe est le double de l'argument du numérateur, c'est-à-dire

$$\Phi_S = 2 \operatorname{Arg} \left[ n_1 \cos \theta_1 + j \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2} \right]$$

L'argument admet un cosinus positif donc on peut effectivement écrire

$$\boxed{\Phi_S = 2 \arctan \left[ \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1} \right]}$$

### II.3 – Biréfringence géométrique d'un guide diélectrique bidimensionnel

#### 21 – Le champ électrique proposé

$$\vec{E}_E(M, t) = E_0 \cos(u_E y) e^{j(\omega t - \beta_E z)} \vec{e}_x$$

se décompose par formule d'EULER en

$$\vec{E}_E(M, t) = \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t - \beta_E z - u_E y)} \vec{e}_x + \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t - \beta_E z + u_E y)} \vec{e}_x.$$

Il s'agit de la **superposition de deux oppm de vecteurs d'onde respectifs**  $(0, u_E, \beta_E)$  et  $(0, -u_E, \beta_E)$  **et tout se passe comme si on avait réflexion sur les interfaces « convertissant » l'une des oppm en l'autre**. La relation de dispersion pour chacune de ces oppm impose

$$\boxed{u_E^2 + \beta_E^2 = n_1^2 k_0^2}$$

L'angle d'incidence  $\theta_E$  de ces oppm sur les interfaces vérifie la relation

$$\sin \theta_E = \frac{\beta_E}{\sqrt{u_E^2 + \beta_E^2}}$$

donc

$$\boxed{\sin \theta_E = \frac{\beta_E}{n_1 k_0}}$$

22 – Le guide est le siège d'oppm réfléchies successivement sur les interfaces et qui se superposent pour donner le mode  $TE_0$  étudié. Pour que ce mode existe, il est nécessaire de traduire une condition d'interférence constructive particulière. Afin d'exhiber cette condition, on peut utiliser la ligne en pointillés représentée sur la figure 2 et qui est orthogonale aux rayons montants vers l'interface supérieure.

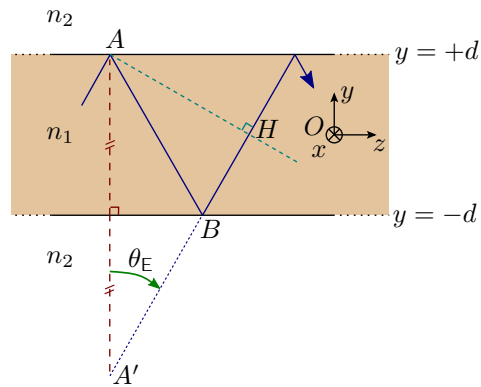


FIGURE 2 – Construction géométrique.

Cette ligne symbolise une surface d'onde pour le « premier » rayon montant sur  $y = +d$ , par théorème de MALUS, mais aussi pour le second rayon montant, avec *a priori* des phases différentes. Pour assurer la condition d'interférences constructives, il faut imposer un déphasage nul (modulo  $2\pi$ ), ce qui se traduit par la relation

$$-\Phi_S + k_0(AH)_{\text{géom}} - \Phi_S = 0 \quad [2\pi]$$

où les termes  $-\Phi_S$  sont les retards de phase pris lors des réflexions (en  $A$  puis en  $B$ ) et  $(AH)_{\text{géom}}$  est le chemin optique géométrique de  $A$  à  $H$ . Or, en songeant à utiliser le point virtuel  $A'$  symétrique de  $A$  par rapport à  $y = -d$ , il vient

$$(AH)_{\text{géom}} = n_1[AB + BH] = n_1 A'H = 4n_1 d \cos \theta_E$$

donc la relation antérieure s'écrit

$$4k_0 n_1 d \cos \theta_E - 2\Phi_S = 0 \quad [2\pi].$$

**La condition de résonance de l'énoncé n'est donc qu'un cas particulier de traduction d'une condition d'interférences constructives sans le modulo  $2\pi$  (car seul le mode  $TE_0$  est considéré).**

23 – Pour déterminer l'angle  $\theta_E$ , on utilise les relations

$$\Phi_S = 2 \arctan \left[ \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_E - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_E} \right] \quad \text{et} \quad 2k_0 n_1 d \cos \theta_E = \Phi_S$$

pour déduire, par élimination de  $\Phi_S$ , l'équation implicite

$$\arctan \left[ \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_E - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_E} \right] = k_0 n_1 d \cos \theta_E$$

La résolution numérique effectuée à la calculatrice donne

$$\theta_E = 1,133 \text{ rad} = 64,92^\circ$$

L'angle d'incidence obtenu est relativement important et bien **supérieur à l'angle de réflexion limite**  $\theta_\ell = 16,71^\circ$ .

On peut alors calculer la distance caractéristique d'atténuation

$$\delta = \frac{1}{k_0 \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_E - n_2^2}} = 82,08 \text{ nm}$$

Force est de constater que l'onde évanescente **s'étend de façon assez notable de part et d'autre du guide** (cette caractéristique est d'ailleurs utilisable pour coupler des guides placés à des distances de cet ordre).

24 – L'onde guidée admet pour phase propagative  $\omega t - \beta_E z$ , donc sa vitesse de phase est

$$v_{\varphi,E} = \frac{\omega}{\beta_E}$$

donc

$$n_E = \frac{c}{v_{\varphi,E}} = \frac{c \beta_E}{\omega}$$

Comme on sait que  $k_0 = \omega/c$  (relation de dispersion des oppm dans le vide), on a effectivement

$$n_E = \frac{\beta_E}{k_0}$$

Puisque  $\sin \theta_E = \beta_E / (n_1 k_0)$ , on déduit

$$n_E = n_1 \sin \theta_E = 3,149$$

Cette valeur est bien voisine de 3,1 comme annoncé par le sujet.

25 – On obtient pour le guide bidimensionnel étudié

$$n_E - n_M = 0,304$$

La biréfringence obtenue ici est **du même ordre** que celle de  $n_x - n_y \simeq 0,16$  prévue pour le guide dans le support documentaire (et celle d'environ 0,18 mesurée). Il existe tout de même écart dans la mesure où, même si l'épaisseur  $2d$  considérée pour le guide bidimensionnel est comprise entre les hauteur et largeur du guide du document, ce dernier admet une géométrie différente, sa section étant rectangulaire.

La valeur obtenue pour la biréfringence est tout à fait remarquable **puisque'elle particulièrement importante ! Elle est par exemple très grande devant la biréfringence d'un barreau de plexiglas qui est de l'ordre de  $10^{-5}$  à la même longueur d'onde.**

#### II.4 – Modification de la polarisation dans le guide

26 – L'équation de MAXWELL-AMPÈRE dans le milieu sans courant libre s'écrit, pour le mode  $TM_0$ ,

$$\text{rot } \vec{B}_M = \frac{n_1^2}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_M}{\partial t}.$$

Avec la notation complexe de l'énoncé, cela donne

$$j\omega \frac{n_1^2}{c^2} \vec{E}_M = \text{rot } \vec{B}_M = \frac{\partial B_{Mx}}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial B_{My}}{\partial z} \vec{e}_x$$

soit

$$\vec{E}_M = -\frac{c^2 B_0}{n_1^2 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_M \cos(u_M y) \\ j u_M \sin(u_M y) \end{pmatrix} e^{j(\omega t - \beta_M z)}$$

Le mode  $TM_0$  n'est pas transverse électrique puisque la composante suivant la direction de propagation (selon  $\vec{e}_z$ ) n'est pas nulle.

27 – Au point  $A_1$ , on a le champ électrique total complexe

$$\vec{E}_t(A_1, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} E_{t,0} e^{j(\omega t + \beta_E z_0/4)},$$

ce qui donne un état de polarisation circulaire gauche.

Au point  $O$ , on a le champ électrique total complexe

$$\vec{E}_t(O, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_{t,0} e^{j\omega t},$$

ce qui donne un état de polarisation rectiligne orienté selon la première bissectrice des axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ).

Au point  $A_2$ , on a le champ électrique total complexe

$$\vec{E}_t(A_2, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} E_{t,0} e^{j(\omega t - \beta_E z_0/4)},$$

ce qui donne un état de polarisation circulaire droit.

Au point  $A_3$ , on a le champ électrique total complexe

$$\vec{E}_t(A_3, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} E_{t,0} e^{j(\omega t - \beta_E z_0/2)},$$

ce qui donne un état de polarisation rectiligne orienté selon la seconde bissectrice des axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ).

Au point  $A_4$ , on a le champ électrique total complexe

$$\vec{E}_t(A_4, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} E_{t,0} e^{j(\omega t - 3\beta_E z_0/4)},$$

ce qui donne un état de polarisation circulaire gauche.

Cette succession d'états de polarisation est strictement identique à celle représentée sur la figure 2 du support documentaire.

Avec la biréfringence  $n_E - n_M = n_x - n_y = 0,16$  déduite du début du document, il vient la longueur

$$z_0 = 9,6 \mu\text{m}$$

Avec la biréfringence expérimentale  $n_E - n_M = \Delta n \simeq 0,18$  (approchée) fournie en fin de document, il vient la longueur

$$z_0 \simeq 8,6 \mu\text{m}$$

Ces valeurs justifient les longueurs typiques choisies par les expérimentateurs qui s'échelonnent de 9,0 à 18,0  $\mu\text{m}$  : on profite bien, avec de telles longueurs, d'une modification notable de l'état de polarisation de l'onde guidée tout au long du guide.

### III – Torsion du guide d'onde

#### III.1 – Torsion statique d'un câble

28 – On considère comme système la tranche de câble comprise entre les plans situés en  $z$  et  $z + dz$ . Il subit deux couples de torsion élastique à ses extrémités, ainsi que le couple mécanique extérieur complémentaire. Dans le référentiel galiléen d'étude, le théorème du moment cinétique appliqué à ce système selon l'axe ( $Oz$ ) fournit à l'équilibre la relation

$$\frac{1}{2} \pi G_c R^4 \left[ \frac{d\theta}{dz}(z + dz) - \frac{d\theta}{dz}(z) \right] + \tau_m \cos(\varphi_0 + \Delta k z) dz = 0$$

soit, finalement,

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} = -\frac{2\tau_m}{\pi G_c R^4} \cos(\varphi_0 + \Delta k z)$$

29 – La résolution de l'équation différentielle précédente permet de trouver

$$\theta(z) = \theta_a \cos(\varphi_0 + \Delta k z) + Az + B \quad \text{avec} \quad \theta_a = \frac{2\tau_m}{\pi G_c R^4 (\Delta k)^2}$$

et où  $A$  et  $B$  sont deux constantes déterminées par les deux conditions aux limites. Celles-ci s'écrivent

$$\theta\left(-\frac{\ell}{2}\right) = \theta_a \cos\left(\varphi_0 - \frac{\Delta k \ell}{2}\right) - A \frac{\ell}{2} + B = 0$$

$$\text{et} \quad \theta\left(+\frac{\ell}{2}\right) = \theta_a \cos\left(\varphi_0 + \frac{\Delta k \ell}{2}\right) + A \frac{\ell}{2} + B = 0.$$

Pour connaître l'angle de torsion  $\theta(0)$  au milieu du câble, seule la constante  $B$  est à isoler et elle vaut

$$B = -\frac{\theta_a}{2} \left[ \cos\left(\varphi_0 + \frac{\Delta k \ell}{2}\right) + \cos\left(\varphi_0 - \frac{\Delta k \ell}{2}\right) \right] = -\theta_a \cos \varphi_0 \cos\left(\frac{\Delta k \ell}{2}\right)$$

donc  $\theta(0) = \theta_a \cos \varphi_0 - \theta_a \cos \varphi_0 \cos\left(\frac{\Delta k \ell}{2}\right) = \theta_a \cos \varphi_0 \left[1 - \cos\left(\frac{\Delta k \ell}{2}\right)\right]$

soit 
$$\theta(0) = \frac{2\tau_m}{\pi G_c R^4 (\Delta k)^2} \cos \varphi_0 \left[1 - \cos\left(\frac{\Delta k \ell}{2}\right)\right]$$

Cet angle étant proportionnel à  $\cos \varphi_0$ , on rend maximal l'angle absolu  $|\theta(0)|$  de torsion au centre du câble pour  $\varphi_0 = 0$  [ $\pi$ ] et la plus petite valeur positive possible est

$$\varphi_0 = 0$$

Finalement, la valeur maximale de cet angle absolu (qui est alors l'angle maximal de torsion pour l'ensemble du câble) est

$$\theta_{\max} = \frac{2\tau_m}{\pi G_c R^4 (\Delta k)^2} \left|1 - \cos\left(\frac{\Delta k \ell}{2}\right)\right|$$

**30** – On identifie les amplitudes des couples linéiques du modèle du câble et du support documentaire. Il vient

$$\tau_m = \eta \frac{\Delta k}{\omega} 2a_x a_y.$$

Or,  $\mathcal{P} = a_x^2 = a_y^2 = a_x a_y$  et  $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda_0}$

donc, finalement,

$$\tau_m = \eta \frac{\lambda_0 \mathcal{P} \Delta k}{\pi c}$$

La figure 5C présente deux échelles pour l'abscisse : celle du bas correspond à  $\ell$  (extension de 0 à 20  $\mu\text{m}$ ) et celle du haut à  $\Delta k \ell / \pi$  (extension de 0 à 4,7 rad environ). On en déduit que

$$\Delta k \simeq \frac{4,7}{20 \times 10^{-6}} \times \pi \text{ m}^{-1} \quad \text{soit} \quad \Delta k \simeq 7,4 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$$

On peut remarquer que ce résultat est cohérent avec les valeurs expérimentales du document  $\Delta n = 0,18$  et  $\lambda_0 = 1540 \text{ nm}$  puisque  $\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n \simeq 7,3 \times 10^5 \text{ m}^{-1} \dots$

L'ordre de grandeur de  $\tau_m$  est finalement

$$\tau_m = 10^{-13} \text{ N}$$

**31** – L'ordre de grandeur de l'angle maximal de torsion statique du câble est

$$\theta_{\max} \simeq 10^{-3} \text{ } \mu\text{rad}$$

Il s'agit là d'un angle vraiment très faible et indétectable directement dans la pratique. Il est donc judicieux de faire appel à un régime variable de forçage de la torsion et au système de détection avec la nanopoutre.

### III.2 – Modes propres de torsion du câble

**32** – Pour un système linéaire oscillant libre à plusieurs degrés de liberté, un **mode propre** est une solution telle que **chaque degré de liberté évolue sinusoïdalement dans le temps avec la même pulsation**.

Dans le cas du câble étudié, un mode propre est **une onde stationnaire oscillante** (pulsation fixée) en régime libre (sans forçage extérieur).

**33** – On reprend l'écriture du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe ( $Oz$ ) pour la tranche, en régime variable cette fois. Cela permet d'obtenir

$$J_\ell dz \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\pi G_c R^4}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dz,$$

d'où une équation de D'ALEMBERT

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad \text{avec} \quad v^2 = \frac{G_c}{\rho}.$$

On cherche une solution de type onde stationnaire de rang  $n$  de pulsation propre  $\omega_n$ , de facteur d'amplitude  $A_n$  et de partie spatiale normalisée  $\theta_n(z)$  :

$$\theta(z, t) = A_n \theta_n(z) \cos(\omega_n t + \gamma_n)$$

L'équation de D'ALEMBERT impose

$$-\omega_n^2 \theta_n(z) = v^2 \frac{d^2 \theta_n}{dz^2}$$

dont la solution  $\theta_n(z)$  est sinusoïdale, de pulsation spatiale  $k_n = \omega_n/v$ . L'onde stationnaire doit être nulle en  $\pm \ell/2$  à tout instant donc  $\theta_n(z)$  y est nulle aussi. Cela signifie que la longueur totale du câble s'identifie à un multiple entier de  $\lambda_n/2$ , où  $\lambda_n$  est la longueur d'onde de l'onde stationnaire. Par conséquent,

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}.$$

Ensuite, vu que  $\omega_n/v = k_n = 2\pi/\lambda_n$ , il vient

$$\omega_n = \frac{n\pi v}{\ell}$$

soit

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{G_c}{\rho}}$$

On aboutit à la partie spatiale normalisée du mode de rang  $n$  suivante :

• pour  $n = 2p$  :

$$\theta_{2p}(z) = \sin\left[\frac{2p\pi z}{\ell}\right]$$

• pour  $n = 2p + 1$  :

$$\theta_{2p+1}(z) = \cos\left[\frac{(2p+1)\pi z}{\ell}\right]$$

34 – Il s'agit de représenter la fonction

$$\tau(z)\theta_1(z) = \tau_m \cos(\Delta k z) \cos\left(\frac{\pi z}{\ell}\right) \quad \text{où} \quad \Delta k \simeq 7,4 \times 10^5 \text{ m}^{-1}.$$

La figure 3 fournit la représentation demandée. Force est de constater que **le tracé est concordant avec celui de la figure 4A** du support documentaire ; néanmoins, il peut rester des écarts quantitatifs car le modèle adopté ici est très simplifié (section du câble différente, absence de nanopoutre..).

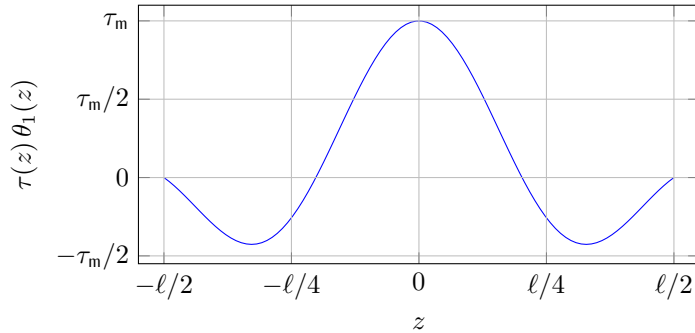


FIGURE 3 – Représentation de la fonction  $\tau(z)\theta_1(z)$ .

### III.3 – Amplification de l'amplitude de la torsion

35 – Si l'on fait une modulation temporelle dans un système oscillant, on peut atteindre des amplitudes très fortes à **la résonance**. Le choix d'un bon facteur de qualité est déterminant pour cela (valeur très élevée dans le dispositif du document).

Dans le document, la grandeur modulée est **le déphasage entre les modes TE et TM à l'entrée du guide d'onde, ce qui est réalisé grâce à une modulateur électro-optique**.

36 – On reconnaît l'expression de l'équation d'un oscillateur linéaire amorti forcé sinusoïdalement :

- $I\ddot{\psi}$  est la **dérivée temporelle du moment cinétique de l'oscillateur** (terme inertiel en rotation).  $I$  représente donc un **moment d'inertie effectif** pour le guide et la nanopoutre.
- $-\alpha\dot{\psi}$  est un **couple de frottement de type visqueux** : il modélise les **phénomènes dissipatifs** pour le système lors de la torsion et le facteur  $\alpha$  est le **coefficient de frottement (ou dissipatif) associé**.
- $-K\psi$  est un **couple de torsion (rappel élastique)** :  $K$  est la **constante effective de rappel en torsion** du guide.
- $\delta T_e \cos(\Omega t)$  est le **couple de torsion effectif optomécanique** introduit par le passage de l'onde électromagnétique dans le guide d'onde.

37 – Le couple effectif impose un régime forcé à la pulsation  $\Omega$  rapidement étudiable en utilisant la notation complexe. Le couple de forçage s'écrit  $\underline{T}_e = \delta T_e e^{j\Omega t}$  et on cherche l'amplitude des oscillations sous la forme  $\underline{\psi} = \underline{\psi}_0 e^{j\Omega t}$  où  $\underline{\psi}_0$  est un complexe permettant de tenir compte du déphasage éventuel (introduit par le frottement comme on le voit ensuite). L'équation différentielle de l'oscillateur forcé devient

$$-\Omega^2 I \underline{\psi} + j\Omega \alpha \underline{\psi} + K \underline{\psi} = \underline{T}_e.$$

En simplifiant par  $e^{j\Omega t}$ , il vient l'amplitude complexe

$$\underline{\psi}_0 = \frac{\delta T_e}{K - I\Omega^2 + j\Omega\alpha}$$

et on reconnaît là un effet de filtrage de type passe bas d'ordre 2 (pouvant être résonant si le facteur de qualité est suffisant, ce qui est manifestement le cas dans l'expérience réalisée). L'amplitude réelle associée est le module de  $\underline{\psi}_0$ , soit

$$|\underline{\psi}_0| = \frac{\delta T_e}{\sqrt{(K - I\Omega^2)^2 + \Omega^2 \alpha^2}}$$

38 – Le moment d'inertie de l'oscillateur est essentiellement dû à la longue nanopoutre (tige de silicium de longueur  $L_n = 56 \mu\text{m}$ , épaisseur  $h_n = 340 \text{ nm}$  et largeur  $w_n = 600 \text{ nm}$ ). En la considérant homogène et rectiligne (malgré les nanocavités et la flexion en réalité..), il vient

$$I \simeq \frac{1}{12} M_n L_n^2 = \frac{\rho h_n w_n L_n^3}{12} = 7 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

soit l'ordre de grandeur  $I \simeq 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

La figure 4C de l'énoncé est une courbe de résonance en amplitude du système oscillant libre pour le mode fondamental. La fréquence de résonance est d'environ  $f_1 \simeq 359 \text{ kHz}$  (on n'a pas besoin d'une grande précision pour accéder aux ordres de grandeur demandés). On peut faire l'hypothèse d'un facteur de qualité très important (vu que le filtre passe bas est manifestement résonant avec une étroitesse relative très faible et aussi vu le souhait d'avoir une bonne amplification à la résonance !). Il est alors légitime d'identifier la fréquence de résonance de l'oscillateur avec frottement à celle de l'oscillateur harmonique :

$$f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{I}}.$$

Cela permet de calculer le couple de torsion effectif

$$K = 4\pi^2 I f_1^2 \simeq 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pour accéder au coefficient  $\alpha$  de l'amortissement, estimons d'abord l'ordre de grandeur du facteur de qualité (ce qui permet de valider par la même occasion l'hypothèse  $Q \gg 1$ ). La modélisation de type filtre passe bas d'ordre 2 rejoint celle d'un filtre passe bande



d'ordre 2 au voisinage de la résonance pour  $Q \gg 1$  (courbe rouge de la figure 4C du support documentaire que l'on utilise ensuite). L'amplitude maximale de la modélisation est 0,82 et la bande passante en fréquence pour une amplitude de  $0,82/\sqrt{2} = 0,58$  est de  $\Delta f \simeq 4 \times 10^1$  Hz. Finalement,

$$Q \simeq \frac{f_1}{\Delta f} \simeq 10^4$$

Cette valeur est bien largement supérieure à l'unité, conformément à ce qui a été annoncé antérieurement (hypothèse  $Q \gg 1$  validée). On peut alors déduire le coefficient  $\alpha$  de l'amortissement puisque

$$Q = \frac{2\pi f_1 I}{\alpha}$$

donc

$$\alpha = \frac{2\pi f_1 I}{Q} = 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

On termine par l'estimation de l'amplitude angulaire maximale des oscillations, obtenue à la résonance. On remarque dans le support documentaire que

$$\delta T_e = -T_m \delta \varphi_0 \sin \varphi_0.$$

Pour avoir l'amplitude maximale, il faut que  $|\sin \varphi_0| = 1$  (voir figure 5B). Sur la figure 5C, on peut lire pour la longueur de guide choisie  $T_m \simeq 0,3 \times 10^{-18} \text{ N} \cdot \text{m}$ . L'amplitude angulaire maximale des oscillations obtenue à la résonance est par conséquent

$$|\psi_0|_{\max} = \frac{|\delta T_e|}{\Omega_1 \alpha} = \frac{T_m \delta \varphi_0}{\Omega_1 \alpha}$$

soit

$$|\psi_0|_{\max} = \frac{Q T_m \delta \varphi_0}{K}$$

Pour la modulation de phase  $\delta \varphi_0 = 10^{-2}$  rad, il vient

$$|\psi_0|_{\max} = 10^{-6} \text{ rad}$$

On trouve donc un résultat de l'ordre du microradian, soit 1000 fois plus que celle déterminée dans la section avec torsion optomécanique statique. On profite bien de l'effet de résonance avec la modulation de phase effectuée et l'ordre de grandeur de l'angle de torsion obtenu ici est cohérent avec les valeurs lisibles dans le support documentaire (en particulier sur la figure 5A).